数理解析研究所講究録
998 巻 1997 年 126-131

保型形式と p 進 Hodge 理論

東大 数理 斎藤 毅 (Takeshi Saito)
email: t-saito@ ms.u-tokyo.ac.jp

$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ を正規化された固有 cusp 形式とし, ℓ を素数とする. 以下簡単のため $a_n\in\mathbb{Q}, n\in\mathbb{N}$ と仮定する. $\rho_{f,\ell}$ を f に伴う 2 次元の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ℓ 進表現とする. $p\neq\ell$ が f の level と素ならば, $\rho_{f,\ell}$ は p で不分岐であり,

$$\mathrm{Tr}\rho_{f,\ell}(Fr_p)=a_p$$

である. この条件により $\rho_{f,\ell}$ は同形を除き定まる. Deligne-Langlands-Carayol により, $\rho_{f,\ell}$ の分解群 $G_p=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ への制限 $\rho_{f,\ell,p}$ は, $p\neq\ell$ に対しては, 局所 Langlands 対応と両立することが知られている. ここでは, p 進 Hodge 理論によって定義される関手 D_{pst} を考えることにより, この両立性が $p=\ell$ でもなりたつことを示す. (保型形式に伴う ℓ 進表現については, [D1] を参照. 以下段落ごとに参照すべき文献をその段落の最後に掲げる.)

まず局所 Langlands 対応との両立性について説明する. まず表現 $\rho_{\ell,p}$ の分解群 $G_p=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ への制限をみる. Grothendieck の monodromy 定理により, $p\neq\ell$ なら, $\rho_{f,\ell,p}$ の惰性群 $I_p\subset G_p$ への制限は, 準巾単である. すなわち I_p の開部分群 J と巾零作用素 N で $\sigma\in J$ なら $\rho_{f,\ell}(\sigma)=\exp(t_{\ell,p}(\sigma)N)$ を満たすものが存在する. ここで $t_{\ell,p}:I_p\to\mathbb{Z}_\ell(1)\simeq\mathbb{Z}_\ell$ は p の ℓ 巾乗根への作用で定まる準同型である. よって, 核が開な Weil 群 $W_p\subset G_p$ の F 半単純表現 $'\rho_{f,\ell,p}$ で $\mathrm{Tr}\,'\rho_{f,\ell,p}(\sigma)=\mathrm{Tr}\rho_{f,\ell,p}(\sigma), \sigma\in W_p$ であるものがただ一つ存在する. ここで Weil 群 W_p とは標準写像 $G_p\to\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ による, Frobenius 置換によって生成される ($\mathbb{Z}$ と同型な) 部分群の逆像であり, W_p の表現が F 半単純とは, 任意の元 $\sigma\in W_p$ の作用が半単純なことである. この表現 $'\rho_{f,\ell,p}$ と巾零 monodromy 作用素 N の対 $('\rho_{f,\ell,p},N)$ のことを, $\rho_{f,\ell,p}$ から定まる Weil-Deligne 群の表現という. (この段落は [D3] 参照.)

一方, π_f を f によって生成されるアデール $GL_2(\mathbb{A})$ の cuspidal 保型表現とすると, これはテンソル積 $\pi_f=\bigotimes_v\pi_{f,v}$ に分解する. $\mathbb{Q}$ の各素点 v に対し, $\pi_{f,v}$ は, $GL_2(\mathbb{Q}_v)$ の (無限次元) 既約許容表現である. $v=p$ とすると, 局所 Langlands 対応により, $\pi_{f,v}$ に対応する Weil-Deligne 群の 2 次元の表現 $\sigma(\pi_{f,p})$ が定まる. 仮定 $a_n\in\mathbb{Q}$ により, これは $\mathbb{Q}$ 上有理的である. (この段落は [D2],[Ku] 参照.)

上で述べた両立性とは,

定理. *(Carayol[C])* $p\neq\ell$ ならば,

$$('\rho_{f,\ell,p},N)\simeq\sigma(\pi_{f,p}).$$

のことである.

$p=\ell$ とする. まず関手 D_{pst} の定義をする. B_{st} を Fontaine が定義した環とする. これは B_{cris} を含む B_{dR} の部分環である. 分解群 G_p の有限次元 p 進表現 V に対し

$$D_{pst}(V)=\bigcup_{J\subset I_p}(B_{st}\otimes V)^J$$

とおく．ここで Jは惰性群 I_pの開部分群を走り，右肩の Jは不変部分を表す．以下 $D = D_{pst}(V)$ とかく．Dは有限次元$\hat{\mathbb{Q}}_p^{nr}(= B_{st}^J)$ 線形空間であり $\dim D \leq \dim V$がなりたつ．$\dim D = \dim V$となるとき，Vは pst(potentially semi-stable の略) であるという．$D = D_{pst}(V)$ 上の Weil-Deligne 群の表現を Fontaine に従って定義する．Galois 群 G_pの自然な B_{st}への作用と Vへの作用は，Dへの半線形な作用を定める．半線形というのは G_pの$\hat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$ への自然な作用と両立するということである．Frobenius φ は，B_{st}上の半線形な作用素だから，これを使って Galois 群の作用を$\varphi^{n(\sigma)} \circ \sigma$ と修正することにより，Weil 群 W_pの線形な作用が得られる．ここで$\sigma \in W_p$に対し，$n(\sigma)$はその標準写像 $W_p \to \mathbb{Z}$ による像である．Dの Nは B_{st}の Nによってひきおこされる．Vが保型形式 fから定まる表現$\rho_{f,p,p}$のとき，このようにして定まる Weil-Deligne の表現の F半単純化を $('\rho_{f,p,p}, N)$ で表す (この段落は [Fo] 参照.)

主定理． 表現$\rho_{f,p,p}$ は *potentially semi-stable* であり，

$$('\rho_{f,p,p}, N) \simeq \sigma(\pi_{f,p}).$$

命題． $\sigma(\pi_{f,p})$ に対し，*monodromy filtration* は *weight filtration* を与える．

命題の意味を説明する．巾零 monodromy 作用素 $N : V \to V$に対し，その monodromy filtration とは Vの filtration V_iで $N(V_i) \subset V_{i-2}$で N^iが同型 $Gr_i V \to Gr_{-i} V$ をひきおこすものとして特徴づけられる．この Filtration が weight filtration を与えるとは，幾何的 Frobenius $Fr_p \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ の Weil 群への (任意の) もちあげ$\sigma \in W_p$) にたいし，その $Gr_i V$への作用の固有値が代数的数であり，その全ての共役の複素絶対値が $p^{(k-1+i)/2}$ となることをいう．

一般に motive から定まる ℓ進表現について，monodromy filtration は weight filtration を与えると予想されているが，これが確かめられている場合はそう多くない．

証明の概略は次のとおり．まず$\rho_{f,p,p}$が pst であることは，兵頭-加藤-辻により証明された C_{st}予想とこの表現が久賀-佐藤多様体のコホモロジーの直和因子であることの帰結である．

C_{st}予想とは，p 進体上の semi-stable reduction をもつ proper smooth 多様体の p 進 etale cohomology は stable 表現であるという命題である．ここで，semi-stable reduction をもつというのは，整数環 O上の proper な正則モデルで，閉ファイバーが被約な正規交叉因子となるものをもつという意味である．p 進表現 Vが stable 表現であるとは $\dim V = \dim(V \otimes B_{st})^I$ ということであり，$D_{pst}(V)$ への惰性群 Iの作用が自明といっても同じことである．(この段落は [K],[T] 参照.)

久賀-佐藤多様体とは，modular 曲線 M上の普遍楕円曲線 $E \to M$ のファイバー積 $X = E \times_M E \cdots \times_M E$ のコンパクト化である．因子 Eの個数は，fの重さ kから 2 を引いたものである．後で触れるように，久賀-佐藤多様体は，$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大上 semi-stable reduction をもつので，そのコホモロジー，従ってさらにその直和因子 $\rho_{f,p,p}$ は pst とわかる．

同型を示すには，上で紹介した Carayol の結果により，p と $\ell \neq p$ を比べればよい．正確にいえば，

(1)
$$\mathrm{Tr}(\sigma|D_p) = \mathrm{Tr}(\sigma|V_\ell)$$

が, $\sigma \in W_p, n(\sigma) \geq 0$ についてなりたつ. ここで, V_ℓは$\rho_{f,p,\ell}$の表現空間, $D_p = D_{pst}(V_p)$ で, $n : W \to \mathbb{Z}$ は標準写像である.

(2)

$$D_p\text{上の } N\text{が } 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_\ell\text{上の } N\text{が } 0.$$

を示せばよい. (1) において, 定義によれば右辺は p 進数 (正確には $\mathbb{Q}_p^{nr}$の元) 左辺は ℓ進数であるが, これが両辺ともに有理数 (一般には fの Fourier 係数によって生成される代数体の元) で等しい, というのが (1) の等式の意味である.

これを最終的には Lefschetz の跡公式に帰着することによって示す. Lefschetz の跡公式は ℓ進 etale cohomology についても, cristalline cohomology に対しても次のように同じ形をしているから, 上のような等式を導くことができるのである.

Lefschetz の跡公式. Xを標数 $p > 0$ の代数閉体 k上の *proper smooth* 多様体とし, Γを Xの代数的対応とすると,

$$Tr(\Gamma : H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)) = Tr(\Gamma : H^*_{cris}(X/W)) = (\Delta, \Gamma)$$

がなりたつ. ここで $\ell \neq p$ であり, $Tr(H^*)$ は跡の交代和, (Δ, Γ) は交点数を表す.

cristalline cohomology についての跡公式は, Gillet-Messing と Gros により独立に cristalline cycle 写像を定義することにより示されている. (ℓ進 cohomology の Lefschetz 公式については SGA$4\frac{1}{2}$[Cycle] 参照.)

上の (1) の証明は, 表現$\rho_{f,\ell}$ の cohomological な構成により,

$$\text{(1')} \qquad \mathrm{Tr}(\sigma \circ T_q \circ \tau : H^*(X_{\bar{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{Tr}(\sigma \circ T_q \circ \tau : D(H^*(X_{\bar{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p)))$$

に帰着される. ここで, Xは上ででてきた久賀-佐藤多様体であり, T_q(qは fのレベルや p と素な素数) は Hecke 作用素, τは普遍楕円曲線 Eの-1 倍や成分の置換が定めるXの自己同型である. (この段落は [Sch] 参照.)

しかしこの跡の等式を Lefschetz 跡公式から直接導くことはできない. なぜならσの作用は Galois 群の作用であり, Lefschetz 跡公式は, 幾何的な作用素についてなりたつものだからである. そこで Galois 群の作用を幾何的な作用で置き換えることが必要になる. それを可能にするものがこれから説明する weight スペクトル系列である. weight スペクトル系列とは, 一般に局所体上の semi-stable reduction をもつ多様体に対し, その cohomology を reduction の既約成分やそれらの共通部分の cohomology で表すスペクトル系列である.

X_{O_K}を, $\mathbb{Q}_p$の最大不分岐拡大の完備化$\hat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$の有限次拡大 K の整数環 O_K上の久賀-佐藤多様体 Xの semi-stable モデルとする. これは次のようにして得られる. まず曲線の安定還元定理 [De-Mu] を modular 曲線 Mに適用してその semi-stable モデル M_{O_K}を得る. これの上の普遍楕円曲線のファイバー積をとって, 久賀-佐藤多様体のモデルを得る. cusp 以外では $E \to M_{O_K}$ は proper smooth なのでこれで cusp 以外では semi-stable モデルが定まる. 最後に Deligne にしたがって, cusp で特異点を解消して semi-stable モデルを得る. Deligne は特異点解消を体上で与えているが, この構成は相対的にも全く同様に行える. こうして久賀-佐藤多様体の semi-stable モデルが構成される. Galois 群, Hecke 作用素, 自己同型の作用は自然にこのモデルに延長されることに注意しておこう. (この段落は [D1] 参照.)

Steenbrink-Rapoport-Zink の weight スペクトル系列は, このとき

$$E_1^{**} = H^*(Y^{(*)}, \mathbb{Q}_\ell(*)) \Rightarrow H^*(X_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_\ell)$$

という形になる. ここで, YはX_{O_K} の reduction であり, $Y^{(0)}$はYの正規化, $Y^{(1)}$はYの特異部分を表す. これらは$\bar{\mathbb{F}}_p$ 上の (連結ではない) 射影非特異多様体である. X_{O_K}は半安定曲線 M_{O_K}から構成されるので, 3 重の交わりはないことに注意する. 添字は複雑なので説明を略す. (この段落は [R-Z],[I] 参照.)

このスペクトル系列は Galois 群の作用と, Hecke 作用素の作用と, Xの自己同型の作用を保つので, 右辺の跡の交代和を求めるには左辺の跡の交代和を求めれば十分である. Lefschetz 跡公式を適用するには, $\sigma \in W, n(\sigma) \geq 0$ の $H^*(Y^{(*)}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用を幾何的に表せばよい. Yの自己準同型σ_{geom}を絶対 Frobeniusφ を使って$\sigma \circ \varphi^{n(\sigma)}$と定義する. するとこれの$\bar{\mathbb{F}}_p$ への作用は自明なのでσ_{geom}は幾何的な準同型である. さらにφ の ℓ進 etale cohomology への作用は自明なのでσの作用とσ_{geom} の作用は等しい. 従ってσ のかわりにσ_{geom} の作用を考えることにより, ℓ進 cohomology への作用の跡を Lefschetz 跡公式を使って表すことができる.

p に対しても全く同様な議論が平行してなりたつ. まず辻によって最終的に解決した C_{st}-予想により,

$$D_{pst}(H^*(X_{\bar{Q}_p}, \mathbb{Q}_\ell)) = H^*_{\text{log-crys}}(Y/W) \otimes \hat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$$

である. ここで右辺の $H^*_{\text{log-crys}}(Y/W)$ は兵頭-加藤により定義された log crystalline cohomology である. この同型は, Galois 群の作用, Frobenius φ の作用, Hecke 作用素の作用そして自己同型の作用を保つ. (この段落は [H-Ko],[Ko],[T] 参照.)

さらに右辺の log crystalline cohomology については, Mokrane が次の weight スペクトル系列を示している

$$E_1^{**} = H^*_{cris}(Y^{(*)}/W) \Rightarrow H^*_{log-crys}(Y/W).$$

このスペクトル系列は, 上の ℓ進のものと全く同じ形をしている. (この段落は [M] 参照.)

上と同様に, $\sigma \in W_p(n(\sigma) \geq 0)$ の代わりにσ_{geom} の作用を考えることにより, Lefschetz 跡公式から, 跡が ℓ進の場合と全く同様に表されることが導かれる. 以上により (1) が証明される.

monodromy 作用素 Nについての主張 (2) を示すには, weight スペクトル系列をもっと詳しく調べることが必要となる. weight スペクトル系列のうち, Xの自己同型が, ある指標で作用する部分を取り出すと, E_1項のうち 0 でないものは次のようになる

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A^2 \\ & & A^1 \\ & & A^0 & \longrightarrow & B. \end{array}$$

極限の Nは左上の Bから右下の B への恒等写像によってひきおこされる. ここで $A^0, A^2 = \bigoplus_y Sym^{k-2} H^1(E_y)$ は M_{O_K}の閉ファイバーの成分のうち, supersingular point につぶれるものに関する直和で, E_yはその点が moduli する supersingular 楕円

曲線である．$B = \bigoplus_x Sym^{k-2}H^1(E_x)$ は M_{O_K} の閉ファイバーの特異点に関する直和で，E_x はその点が moduli する supersingular 楕円曲線である．A^1 は上のような既約成分 y に関する直和 $\bigoplus_y H^1(y) \otimes Sym^{k-2}H^1(E_y)$ と，そうでない既約成分に関する直和 $\bigoplus_z H^1_!(z, Sym^{k-2}R^1\alpha_*\mathbf{1})$ の直和である．ここで $H^1_!$ は parabolic cohomology を表す．Weil 予想により，これらは全て pure である．つまり，幾何的 Frobenius の作用の固有値は代数的数で，その共役全ての複素絶対値は下の行では $p^{k-2/2}$，真ん中の行では $p^{k-1/2}$，上の行では $p^{k-2/2}$ となる．

boundary 射 $B \to A^2$ と $A^0 \to B$ は次の様に表される．各 super sigular point$t$ ごとに modular 曲線 M_{O_K} の reduction での逆像をとったものの双対グラフ Γ_t を考える．E_t を点 t が moduli する supersingular 楕円曲線とする．$B \to A^2$ は，Γ_t が定める複体に $Sym^{k-2}H^1(E_t)$ をテンソルしたものの t に関する直和であり，$A^0 \to B$ はこれの双対である．これより容易に N は E_2 項の同型をひきおこすことが示せる．

命題はこの事実と上に述べた Weil 予想から直ちに従う．(2) を示すためには，この事実から A^0 および B への Weil 群の作用と Hecke 作用素の作用の跡が p と ℓ で一致することを示せばよい．これは楕円曲線の自己準同型の跡の性質から導かれる．(Lefschetz 跡公式から導くこともできる)．このようにして (2) も示される．以上で定理と命題の証明の解説を終わる．

ここでは楕円保型形式について述べたが，総実代数体の次数を奇数と仮定すれば，Hilbert 保型形式についても同様のことが示せることがほぼわかった．これについてはまた他の機会に述べたいと思う．簡単な解説になってしまったことをおわびします．詳しくは文献 [S] を見てください．

References

[C] Carayol, *Sur les représentations ℓ-adiques associéss aux formes modulaires de Hilbert*, Ann.Sci.ENS **19** (1986), 409-468.

[D1] P.Deligne, *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, Seminaire Bourbaki éxp 355, Lecture note in Math., vol. 179, Springer, 1969, pp. 139-172.

[D2] ———, *Formes modulaires et représentations de $GL(2)$*, Modular forms of one variable II, Lecture note in Math., vol. 349, Springer, 1973, pp. 55-105.

[D3] ———, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular forms of one variable II, Lecture note in Math., vol. 349, Springer, 1973, pp. 501-595.

[D-Mu] P.Deligne-D.Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES **36** (1969), 75-109.

[D-R] P.Deligne-M.Rapoport, *Les schémas de modules des courbes elliptiques*, Modular forms of one variable II, Lecture note in Math., vol. 349, Springer, 1973, pp. 143-316.

[Fa] G.Faltings, *F-isocrystals on open varieties*, Grothendieck festschrift, vol. II, Birkhäuser, 1990, pp. 219-248.

[Fo] J.-M.Fontaine, *Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables*, Périodes p-adiques, Astérisque, vol. 223, 1994, pp. 321-348.

[Gi-Me] H.Gillet-W.Messing, *Cycle classes and Riemann-Roch for crystalline cohomology*, Duke Math. J. **55** (1987), 501-538.

[Gr] M.Gros, *Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie logarithmique*, Bull. Soc. Math. France **113** (1985).

[H-Ko] O.Hyodo-K.Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Périodes p-adiques, Astérisque, vol. 223, 1994, pp. 221-268.

[I] L.Illusie, *Autour du théorème de monodromie locale*, Périodes p-adiques, Astérisque, vol. 223, 1994, pp. 9-58.

[Ko] K.Kato, *Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology*, Périodes p-adiques, Astérisqu vol. 223, 1994, pp. 269-293.

[Kz-Ma] N.Katz-B.Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Ann. of Math. Studies, vol. 108, Princeton University press, 1985.

[Ku] Ph.Kutzko, *The local Langlands conjecture for* $GL(2)$, Ann. of Math. **112** (1980), 381-412.

[La] R.P.Langlands, *Modular forms and ℓ-adic representations*, Modular forms of one variable II, Lecture note in Math., vol. 349, 1973, pp. 361-500.

[M] A.Mokrane, *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato*, Duke Math. J. **72** (1993), 301-377.

[R-Z] M.Rapoport-T.Zink, *Ueber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Characteristik*, Inventiones Math. **68** (1982), 21-201.

[S] T.Saito, *Modular forms and p-adic Hodge theory*, to appear in Inventiones Math..

[Sch] A.Scholl, *Motives for modular forms*, Inventiones Math. **100** (1990), 419-430.

[T] T.Tsuji, *p-adic etale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case (preprint).*